Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 11

28/03/16 (1)

Θεώρημα: (Μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού.)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$. Τότε, υπάρχει $\xi\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$. (I)

Απόδειξη:

Καταρχήν f ολοκληρώσιμη (ως συνεχής) άρα $f\cdot g$ ολοκληρώσιμη (ως γινόμενο δύο ολοκληρώσιμων).

Εφόσον $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\exists x_0,y_0\in[a,b]$ ώστε:

$(m=)f(x_0)\leq f(x)\leq f(y_0)(=M)$ $\forall x\in[a,b]$ και θέτοντας $m=f(x_0)$ και $M=f(y_0)$ το σύνολο τιμών της f είναι το $[m,M]$ (από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών).

Εφόσον $g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$:

$mg(x)\leq f(x)\cdot g(x)\leq M\cdot g(x)$ $\forall x\in[a,b]$

Άρα: $m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx$ (II)

Εφόσον $g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ έχουμε $\int_a^b g(x)dx\geq 0$

1η περίπτωση:

$\int_a^b g(x)dx=0$

Τότε από τη (II) έχουμε $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$.

Έτσι, για οποιοδήποτε $\xi\in[a,b]$ ισχύει η (I).

2η περίπτωση:

$\int_a^b g(x)dx>0$

Τότε από τη (II) έχουμε: $m\leq\overbrace{\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}^{A}\leq M$

Εφόσον, όπως αναφέραμε, το σύνολο τιμών της f είναι το $[m,M]$ $\exists\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=A\Rightarrow$ (I)

Πόρισμα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $\exists\, \xi\in[a,b]$ με $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$

Απόδειξη:

Για $g(x)=1$ $\forall x\in[a,b]$.

Ορισμός: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. (Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ $\forall x\in[a,b]$.) Η συνάρτηση $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη:

Εφόσον η f ολοκληρώσιμη, η f είναι (από τον ορισμό) φραγμένη, δηλαδή $\exists\, M>0$ ώστε $|f(x)|\le M$ $\forall x\in[a,b]$.

Έστω τυχαία $x,y\in[a,b]$ με $x<y$.

Τότε: $|F(x)-F(y)| = |F(y)-F(x)| = \left|\int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| =$

$= \left|\cancel{\int_a^x f(t)dt} + \int_x^y f(t)dt - \cancel{\int_a^x f(t)dt}\right| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le \int_x^y f(t)dt \le$

$\le \int_x^y M dt = M(y-x) = M|y-x|$

Άρα η F ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά M, άρα είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. $|F(x)-F(y)|\le M|x-y|$.

Στα παρακάτω, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ θα εννοούμε ότι $\forall x\in(a,b)$ υπάρχει η $g'(x)\in\mathbb{R}$ και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$g'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$g'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b}$

Θα συμβολίζουμε: $g'(a)=g'_+(a)$, $g'(b)=g'_-(b)$

$\lim_{x\to t} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} = \lim_{h\to\infty} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Θεώρημα: (1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού.)

Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0\in[a,\beta]$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $F'(x_0)=f(x_0)$.

(Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής, δηλαδή συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,\beta]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $F'=f$.)

Απόδειξη:

Θα κάνουμε την απόδειξη για x_0 με $a<x_0<\beta$.

(Στις περιπτώσεις $x_0=a$ και $x_0=\beta$ η απόδειξη γίνεται με όμοιο τρόπο.)

Θέτουμε $\delta_1=\min\{x_0-a,\ \beta-x_0\}$

Για κάθε h με $0<|h|<\delta_1$ έχουμε $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)=$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt\right)-f(x_0)=$$

$$=\frac{1}{h}\left(\cancel{\int_a^{x_0}f(t)dt}+\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt-\cancel{\int_a^{x_0}f(t)dt}\right)-f(x_0)=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt-\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)dt=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η f συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ με $\delta<\delta_1$ ώστε για κάθε $x\in[a,\beta]$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Έστω h με $0<|h|<\delta$

α) $\underline{0<h<\delta}$

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{\overset{\nearrow\, x_0<x_0+h}{x_0+h}}(f(t)-f(x_0))dt\right|\overset{h>0}{\leq}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\leq$$

$$\leq\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\, dt=\frac{1}{h}\cdot h\cdot\varepsilon=\varepsilon$$

β) $\underline{-\delta<h<0}$

Η απόλυτη τιμή εξαφανίζει το μείον.

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{\overset{\nearrow\, x_0>x_0+h}{x_0+h}}(f(t)-f(x_0))dt\right|=$$

$$=\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0+h}^{x_0}(f(t)-f(x_0))dt\right|\leq\frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt\leq$$

$\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon \, dt = \frac{1}{|h|}\cdot \varepsilon(-h) = \varepsilon.$

Έχουμε αποδείξει ότι το $\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Δηλαδή ότι: $F'(x_0)=f(x_0)$

(Αν η f δεν είναι συνεχής ενδέχεται να μην ισχύει.)

<u>Πόρισμα:</u> Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\exists \xi\in(a,b)$ ώστε $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρούμε την $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Εφόσον f συνεχής, F παραγωγίσιμη με $F'=f$.

Από Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού για την F $\exists \xi\in(a,b)$:

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) \Rightarrow \frac{\int_a^b f(t)dt - \cancel{\int_a^a f(t)dt}^{\,0}}{b-a} = f(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b-a)$$

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Μια συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $G'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$ λέγεται παράγουσα της f. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, η F με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι παράγουσα της f.

<u>Ερώτημα:</u> Έχει η f άλλες παράγουσες;

Έστω G μια παράγουσα της f. Τότε $G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$.

Δηλαδή, $(G-F)'(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$.

Τότε, (όπως ξέρουμε από ΑΠΙ ως συνέπεια του Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ.) η $G-F$ είναι σταθερή, δηλαδή $\exists c\in\mathbb{R}$ ώστε $G(x)-F(x)=c$ $\forall x\in[a,b]$.

Όμως, $F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$ άρα $G(a)-0=c$. Δηλαδή, $c=G(a)$.

Άρα, $G(x)-F(x)=G(a)$ $\forall x\in[a,b]$. Δηλαδή, $F(x)=G(x)-G(a)$ $\forall x\in[a,b]$

Δηλαδή, $\int_a^x f(t)dt = G(x)-G(a)$. Ειδικότερα, για $x=b$ $\int_a^b f(t)dt) = G(b)-G(a)$

Έτσι, αποδείξαμε το εξής:

<u>Θεώρημα:</u> (Ειδική περίπτωση του $2^{ου}$ Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, F αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν η G είναι μια παράγουσα της f, τότε $F(x)=G(x)-G(a)$ $\forall x\in[a,b]$

Ειδικότερα $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$.

<u>Σημείωση:</u> Το θεώρημα αυτό ανάγει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συνεχών συναρτήσεων στον υπολογισμό παραγώγων.

Δεν είναι σωστό εν γένει ότι $\int_a^b G'(x) = G(b)-G(a)$ για $G:[a,b]\to\mathbb{R}$.

<u>Π.χ.</u> $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $G(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^2\sin\frac{1}{x^2}, & 0<x\leq 1.\end{cases}$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{G(h)-G(0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} h\cdot\sin\frac{1}{h^2}=0$. Δηλαδή, $G'(0)=0$.

Για $x\in(0,1]$ $G'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x^2}+x^2\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{-2}{x^3}$

Έτσι, $G'(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & 0<x\leq 1.\end{cases}$

Η G' δεν είναι φραγμένη και άρα δεν έχει νόημα να μιλάω για ολοκλήρωμά της.

$\forall n$ $G'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = 0 - \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}}\cdot 1 = -2\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{\pi}$.

Άρα, η G' δεν είναι φραγμένη.

Υπάρχουν (δύσκολα) παραδείγματα $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε G' να μην είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η G' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $\int_a^b G'(x)dx = G(b)-G(a)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$.

Για κάθε $k=1,\dots,n$ από το Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ. στο $[x_{k-1},x_k]$ $\exists\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$: $G(x_k)-G(x_{k-1})=G'(\xi_k)$.

Για κάθε $k=1,\dots,n$ θέτουμε $m_k=\inf\{G'(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k=\sup\{G'(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

Τότε: $m_k\le G'(\xi_k)\le M_k$.

Έτσι $\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})\le \sum_{k=1}^{n} G'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\le \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$

$L(G',P)\le \sum_{k=1}^{n} G(x_k)-G(x_{k-1})\le U(G',P)$

$\Rightarrow L(G',P)\le G(b)-G(a)\le U(G',P)$ $\forall P$ διαμέριση του $[a,b]$.

Παίρνοντας sup ως προς P στην αριστερή ανισότητα και inf ως προς P στην δεξιά ανισότητα και λαμβάνοντας υπόψην ότι η G' είναι ολοκληρώσιμη $\int_a^b G'(x)dx\le G(b)-G(a)\le$

$\le\int_a^b G'(x)dx \Rightarrow \int_a^b G'(x)dx=G(b)-G(a)$.

<u>Συμβολισμός</u>: Θα συμβολίζουμε: $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$

<u>Τεχνικές ολοκλήρωσης</u>: Έστω f, αναζητούμε F ώστε $F'=f$. Θα γράφουμε:

$\int f(x)dx=F(x)+c$. Το c θα παραλείπεται για ευκολία.

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\in\mathbb{N}$

$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c,\ a\neq -1$

$\int e^x dx=e^x$

$\int \cos x\,dx=\sin x$

$\int \sin x\,dx=-\cos x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x$

$\int \frac{1}{x}dx=\log(|x|)$.

<u>Π.χ.</u> Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων.

$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos x\,dx=[\sin x]_{\pi/6}^{\pi/3}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

$\int_1^4\frac{1}{x}dx=\log(4)-\log(1)=2\log(2)$.

$\int_{-4}^{-1}\frac{1}{x}dx=[\log(-x)]_{-4}^{-1}=\log(1)-\log(4)=-2\log(2)$.